ФМИ УФА 2017-2018 - Задачи

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

15 февруари 2018

Задача 1.

Докажете, че ако T е компактен оператор от X в Y, то $T(X)$ е сепарабелно.

Бележка. Тъй като не е пояснено, допускам, че $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ са произволни нормирани пространства.

Първо ще докажем следната лема

Лема 1. *Всяко предкомпактно подпространство U на метрично пространство (X, d) е сепарабелно.*

Доказателство. Тъй като U е предкомпактно подпространство, то $\overline{U}$ е компакт и, следователно, за всяко $k > 0$ покритието на $\overline{U}$ с отворени кълба $\bigcup_{x \in \overline{U}} B_{\frac{1}{k}}(x)$ има крайно подпокритие, а значи U също има крайно подпокритие. Тоест, има крайна $\frac{1}{k}$-мрежа $V_k \subseteq U$, за която

$$U \subseteq \bigcup_{x \in V_k} B_{\frac{1}{k}}(x)$$

Нека вземем произволна точка $u \in U$. Тъй като V_k е $\frac{1}{k}$-мрежа на U, то u се съдържа поне в едно от кълбата $B_{\frac{1}{k}}(v)$, където $v \in V_k$. Означаваме с $f_k : U \to V_k$ функция, която съпоставя на дадено $u \in U$ едно фиксирано $v \in V_k$, за което $u \in B_{\frac{1}{k}}(v)$ и, следователно, свойството $d(u, v) < \frac{1}{k}$ е изпълнено.

Взимаме обединението $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$. То е изброимо, тъй като е изброимо обединение на крайни множества. Освен това, за всяко $u \in U$ можем да намерим фундаментална редица $\{f_k(u)\}_{k=1}^{\infty}$, клоняща към u.

Тъй като V е гъсто и изброимо подпространство на U, то U е сепарабелно. $\square$

Доказателство на задача 1. Нека $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от отворени кълба в X с център в нулата и радиус n. Тъй като T е компактен, той изпраща единичното кълбо (и, следователно, всяко друго кълбо) в предкомпакт. От горната лема, всяко от множествата $T(B_n)$ е сепарабелно.

Изброимо обединение на сепарабелни множества е сепарабелно. Тъй като $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, то

$$T(X) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n)$$

също е сепарабелно. $\square$

Задача 2.

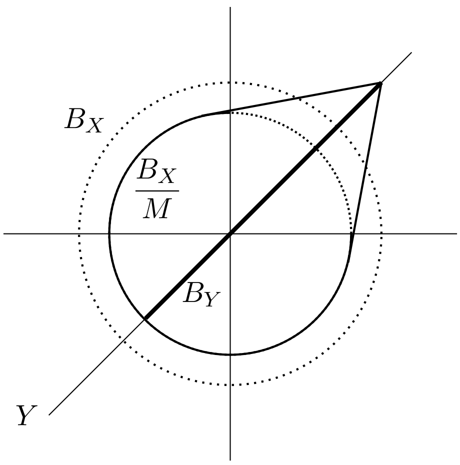
Нека Y е затворено подпространство на банаховото пространство X и $\|\cdot\|$ е еквивалентна норма върху Y. Докажете, че $\|\cdot\|$ може да бъде продължена до еквивалентна норма върху X.

Бележка. Тъй като не е пояснено, допускам, че X е комплексно.

Доказателство. Разглеждаме пространствата $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y) \subseteq X$, където Y е затворено, а $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ са еквивалентни и нека за определеност съществуват положителни константи m и M, за които $m\|y\|_X \leq \|y\|_Y \leq M\|y\|_X$ за всяко $y \in Y$.

Ще намерим множество U, което да служи за затворено единично кълбо на продължението на $\|\cdot\|_Y$ върху X. Да разгледаме затворената обвивка

$$U = \operatorname{Conv}\left(\frac{B_X}{M}, B_Y\right) = \left\{t\frac{x}{M} + (1-t)y : x \in B_X, y \in B_Y, t \in [0,1]\right\}.$$



Фигура 1: Пример в $\mathbb{R}^2$ с $M > 1$ и $m < 1$, начертан спрямо нормата $\|\cdot\|_X$. Подпространството Y е хиперравнина (права) и единичното му кълбо B_Y е удебелената отсечка върху тази права. Единичното кълбо спрямо новата норма е изпъкналата обвивка на B_Y и $\frac{B_X}{M}$.

Естествено е да искаме сечението на Y и U да съвпада с затвореното единично кълбо B_Y на Y. Нека $x \in Y \cap \frac{B_X}{M}$. Тогава

$$\|x\|_Y \leq M \|x\|_X \leq M \frac{1}{M} = 1,$$

откъдето се вижда, че $Y \cap \frac{B_X}{M} \subseteq B_Y$. Следователно

$$Y \cap U = Y \cap \operatorname{Conv}\left(\frac{B_X}{M}, B_Y\right) = Y \cap \operatorname{Conv}(B_Y) = B_Y.$$

Сега ще дефинираме продължението на $\|\cdot\|_Y$. Да означим

$$\lambda(x) = \inf\left\{c > 0 : \frac{x}{c} \in U\right\}.$$

Множеството, по което се взима инфимум, е непразно, понеже U съдържа единичното кълбо на X. Освен това очевидно $\lambda(x) = 1$ за границата на U и $\lambda(x) < 1$ за вътрешността на U.

Първо ще се убедим, че λ е продължение на $\|\cdot\|_Y$. Нека $y \in Y$. Тъй като $Y \cap U = B_Y$, то

$$\lambda(y) = \inf\left\{c > 0 : \frac{y}{c} \in B_Y\right\} = \inf\left\{c > 0 : \|y\|_Y \leq c\right\} = \|y\|_Y.$$

1. $\lambda(x) = 0 \iff x = \vec{0}$.

   Ако $\lambda(x) = 0$, то $\left\{c > 0 : \frac{x}{c} \in U\right\}$ съдържа сходяща към 0 редица, следователно $\frac{x}{c} \in U$ за всяко $c > 0$. Но това е възможно само за $x = \vec{0}$. Обратно, ако $x = \vec{0}$, то $\frac{x}{c} \in U$ за всяко $c > 0$ и $\lambda(x) = 0$.

2. Абсолютна хомогенност

   Нека $t \in \mathbb{C}$. Тогава

$$\lambda(tx) = \inf\left\{c > 0 : \frac{tx}{c} \in U\right\} = \inf\left\{|t|c : c > 0 \text{ и } \frac{tx}{tc} \in U\right\} = |t|\lambda(x).$$

3. Субадитивност

   Нека сега $x, y \in U$. Тогава $\lambda(x) + \lambda(y) \leq 2$. Понеже U е изпъкнало множество,

$$x' = \frac{2x}{\lambda(x) + \lambda(y)} \in U,$$

$$y' = \frac{2y}{\lambda(x) + \lambda(y)} \in U,$$

$$\frac{x' + y'}{2} = \frac{x + y}{\lambda(x) + \lambda(y)} \in U.$$

   Използваме хомогенността на λ:

$$
\begin{aligned}
\lambda\left(\frac{x'+y'}{2}\right) &\leq 1 \\
\lambda\left(\frac{x+y}{\lambda(x)+\lambda(y)}\right) &\leq 1 \\
\lambda(x+y) &\leq \lambda(x)+\lambda(y).
\end{aligned}
$$

За да докажем субадитивността за произволни $x, y \in X$, разглеждаме множеството $\max(\lambda(x), \lambda(y))U$ вместо U.

Показахме, че λ е норма и че съвпада с $\|\cdot\|_Y$ върху Y. Освен това λ и $\|\cdot\|_X$ са еквивалентни, тъй като $\frac{B_X}{M} \subseteq U \subseteq \frac{B_X}{m}$. С това теоремата е доказана. $\square$

Задача 3.

Нека $T : L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$ е такъв оператор, че

$$Tf(x) = \int_{-1}^{1} \min(0, x+y) f(y) dy.$$

Намерете спектъра на T.

Решение. T очевидно е линеен (от свойствата на римановия интеграл) и самоспрегнат (понеже функцията $(x,y) \to min(0, x+y)$ е непрекъсната и симетрична). Освен това

$$Tf(x) = \int_{-1}^{1} \min(0, x+y) f(y) dy = \int_{-1}^{-x} (x+y) f(y) dy$$

За да покажем, че T е и компактен, ще покажем, че образът на затвореното кълбо B_M с радиус $M > 0$ е компактно. Нека $\|f\| < M$ и $x_1 \leq x_2 \in [-1,1]$ са такива, че $|x_1| < \frac{\delta}{2}$ и $|x_2| < \frac{\delta}{2}$ (тогава $|x_1 \pm x_2| < \delta$).

$$
\begin{aligned}
|Tf(x_2) - Tf(x_1)| &= \left| \int_{-1}^{-x_2} (x_2 + y) f(y) dy - \int_{-1}^{-x_1} (x_1 + y) f(y) dy \right| = \\
&= \left| \int_{-1}^{-x_1} (x_2 - x_1) f(y) dy + \int_{-x_1}^{-x_2} (x_2 + y) f(y) dy \right| \leq \\
&\leq M \left| \int_{-1}^{-x_1} (x_2 - x_1) dy + \int_{-x_1}^{-x_2} (x_2 + y) dy \right| = \\
&= M \left| (x_2 - x_1)(1 - x_1) + \frac{(x_2 + y)^2}{2} \Bigg|_{y=-x_1}^{-x_2} \right| = \\
&= M (x_2 - x_1) \left| 1 - x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \leq \\
&\leq \delta M \left| 1 + \frac{x_2 + x_1}{2} \right| \leq \delta M \left(1 + \frac{\delta}{2} \right).
\end{aligned}
$$

Следователно образът $T(B_M)$ е равностепенно непрекъснат. Той е и равномерно ограничен:

$$
Tf(x) = \left| \int_{-1}^{-x} (x + y) f(y) dy \right| \leq M \left| \int_{-1}^{-x} (x + y) dy \right| \leq M \left| \int_{-1}^{1} (y - 1) dy \right| = 2M
$$

Тогава, според теоремата на Арцела-Асколи, множеството $T(B_M)$ е компактно и, следователно, T е компактен.

Понеже T е и самоспрегнат, спектърът $\sigma(T)$ съвпада с множеството на собствените стойности, обединено с нулата.

За да намерим собствените стойности на T, ще преобразуваме интегралното уравнение $Tf = \lambda f$ до диференциално:

$$
\begin{aligned}
Tf(x) &= \lambda f(x) \\
\int_{-1}^{-x} (x + y) f(y) dy &= \lambda f(x) \\
x \int_{-1}^{-x} f(y) dy + \int_{-1}^{-x} y f(y) dy &= \lambda f(x) \Bigg| \frac{d}{dx} \\
\int_{-1}^{-x} f(y) dy - x f(-x) + x f(-x) &= \lambda \dot{f}(x) \Bigg| \frac{d}{dx} \\
f(-x) &= \lambda \ddot{f}(x).
\end{aligned}
$$

Собствените вектори са решения на

$$
\lambda \ddot{f}(x) = f(-x) \tag{1}
$$

Тъй като решенията на диференциалното уравнение $\lambda\ddot{g} = g$, където $g(x) = f(-x)$, са линейни комбинации на решенията $g(x) = e^{\pm\frac{x}{\sqrt{\lambda}}}$, ще бъде достатъчно да вземем само четните функции $g(x)$. Тоест, тези

$$g(x) = ae^{\frac{cx}{\sqrt{\lambda}}} + be^{-\frac{cx}{\sqrt{\lambda}}},$$

за които $|a| = |b|$ и $|c| = 1$ (допускаме и $c = \pm i$, стига стойностите на f да продължават да бъдат реални).

Конкретни решения на (1) са

$$a = b = \frac{1}{2} \text{ и } c = 1 \implies f(x) = \cosh\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$a = -b = \frac{1}{2} \text{ и } c = 1 \implies f(x) = \sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$a = b = \frac{1}{2} \text{ и } c = i \implies f(x) = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$a = -b = \frac{1}{2i} \text{ и } c = i \implies f(x) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Спектътът $\sigma(T)$ е равен на обединението на $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (тъй като горните разсъждения има смисъл за всички $\lambda \neq 0$) и $\{0\}$ (от това, че T е компактен оператор), т.е. $\sigma(T) = [-1, 1]$.